Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,
Section des Sciences, 8me série, t. II, no 5

DIE GEWUNDENEN

KURVEN VOM MAXIMALINDEX

AUF

EINER REGELFLÄCHE ZWEITER ORDNUNG

VON

C. JUEL

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, II. 5

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1917

Pris: Kr. 0,75.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,

6te Række.

Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling.

		Kr.	Øre
	I, med 42 Tavler, 1880—85	29.	50.
1.	**Prytz, K.** Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880	»	65.
2.	**Boas, J. E. V.** Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880	8.	50.
3.	**Steenstrup, Jap.** Sepiadarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881	1.	35.
4.	**Colding, A.** Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12te—14de Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881	10.	»
5.	**Boas, J. E. V.** Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881	2.	»
6.	**Steen, A.** Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882	»	50.
7.	**Krabbe, H.** Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882	1.	35
8.	**Hannover, A.** Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882	1.	60.
9.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884	4.	35.
10.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884	1.	30.
11.	**Lehmann, A.** Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1885	1.	85.
	II, med 20 Tavler, 1881—86	20.	»
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 1ste Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881	3.	15.
2.	**Lorenz, L.** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881	1.	30.
3.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 2den Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882	5.	30.
4.	**Christensen, Odin.** Bidrag til Kundskab om Manganets Ilter. 1883	1.	10.
5.	**Lorenz, L.** Farvespredningens Theori. 1883	»	60.
6.	**Gram, J. P.** Undersøgelser ang. Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français. 1884.	4.	»
7.	**Lorenz, L.** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885	»	80.
8.	**Traustedt, M. P. A.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885	3.	»
9.	**Bohr, Chr.** Om Iltens Afvigelser fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885	1.	»
10.	—— Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler. 1886	1.	70.
11.	**Thiele, T. N.** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886	2.	»
	III, med 6 Tavler, 1885—86	16.	»
1.	**Zeuthen, H. G.** Keglesnitslæren i Oldtiden. 1885	10.	»
2.	**Levinsen, G. M. R.** Spolia Atlantica. Om nogle pelagiske Annulata. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
3.	**Rung, G.** Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
4.	**Meinert, Fr.** De eucephale Myggelarver. Med 4 dobb. Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1886	6.	75.
	IV, med 25 Tavler. 1886—88	21.	50.
1.	**Boas, J. E. V.** Spolia Atlantica. Bidrag til Pteropodernes Morfologi og Systematik samt til Kundskaben om deres geografiske Udbredelse. Med 8 Tavler. Résumé en français. 1886	10.	50.
2.	**Lehmann, A.** Om Anvendelsen af Middelgradationernes Metode paa Lyssansen. Med 1 Tavle. 1886.	1.	50.
3.	**Hannover, A.** Primordialbrusken og dens Forbening i Truncus og Extremiteter hos Mennesket før Fødselen. Extrait en français. 1887	1.	60.
4.	**Lütken, Chr.** Tillæg til »Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene«. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	»	60.
5.	—— Fortsatte Bidrag til Kundskab om de arktiske Dybhavs-Tudsefiske, særligt Slægten *Himantolophus*. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1887	»	75.
6.	—— Kritiske Studier over nogle Tandhvaler af Slægterne *Tursiops*, *Orca* og *Lagenorhynchus*. Med 2 Tavler. Résumé en francais. 1887	4.	75.
7.	**Koefoed, E.** Studier i Platosoforbindelser. 1888	1.	30.
8.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 3die Afhandling. Med 12 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1888	6.	45.
	V, med 11 Tavler og 1 Kort. 1889—91	15.	50.
1.	**Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om de tre pelagiske Tandhval-Slægter *Steno*, *Delphinus* og *Prodelphinus*. Med 1 Tavle og 1 Kort. Résumé en français. 1889	2.	75.
2.	**Valentiner, H.** De endelige Transformations-Gruppers Theori. Résumé en français. 1889	5.	50.
3.	**Hansen, H. J.** Cirolanidæ et familiæ nonnullæ propinquæ Musei Hauniensis. Et Bidrag til Kundskaben om nogle Familier af isopode Krebsdyr. Med 10 Kobbertavler. Résumé en français. 1890	9.	50.
4.	**Lorenz, L.** Analytiske Undersøgelser over Primtalmængderne. 1891	»	75.

(Fortsættes paa Omslagets S. 3.)

DIE GEWUNDENEN KURVEN VOM MAXIMALINDEX AUF EINER REGELFLÄCHE ZWEITER ORDNUNG

VON

C. JUEL

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, II. 5

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1917

Das wesentlichste Merkmal zur Charakterisierung einer ebenen reellen Kurve ist ihre Ordnung, d. h. die grösste Zahl von (reellen) Punkten, welche die Kurve mit einer Geraden gemein haben kann. Seit dem Erscheinen der Abhandlung: „On the circuit of plane curves“ von Miss ANGAS SCOTT im Jahre 1902 [1]) ist es jedoch mehr und mehr anerkannt worden, dass das von ihr eingeführte Merkmal: der Index, nämlich die geringste Zahl von Punkten, welche eine Gerade mit der Kurve gemein haben kann, ein Merkmal von nicht viel geringerer Bedeutung ist. Es sind auch in den letzten Jahren mehrere darauf bezügliche Arbeiten erschienen, so von Hrn. P. FIELD [2]) und Hrn. J. v. Sz. NAGY [3]). Der letztere geht auch auf die naheliegende Erweiterung des Indexbegriffes auf die Raumkurven ein.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe alle auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegende Kurven n ter Ordnung vom Maximalindex $n - 2$ zu bestimmen. Man findet zwei Gattungen von solchen Kurven, die eine ohne, die andere mit Doppelpunkten. Ferner werden die charakteristischen Zahlen der gefundenen Kurven bestimmt; diese sind Klasse, Rang und die Zahl der aus einem Raumpunkt gehenden Doppelsekanten. Es zeigt sich hier recht auffallend, dass diese Zahlen, die sich ja für die algebraischen Kurven leicht aus der genannten Arbeit von Miss ANGAS SCOTT herleiten lassen, von dem algebraischen Charakter der Kurven völlig unabhängig sind. Einen Theil dieser Zahlen habe ich schon im Jahr 1906 in einer Arbeit: „Om Ikke-Analytiske Kurver“ gegeben, aber von einem anderen Gesichtspunkt aus [4]). Die übrigen Sätze der vorliegenden Arbeit habe ich Herbst 1914 in dem Kopenhagener Mathematiker-Verein vorgetragen, aber bis jezt liegen lassen. Die Methoden sind überall rein geometrische; bei Kurven von der hier gemeinten Allgemeinheit ist kein anderer Weg offen.

Aus einer Note in den Nachrichten der K. Gesellsch. der Wissenschaften in Göttingen, welche August 1916 datiert ist, aber erst in 1917 mir in die Hände gekommen ist, ersehe ich, dass Hr. Prof. H. MOHRMANN eine Arbeit über denselben Gegenstand wie hier zu veröffentlichen gedenkt [5]). Ich habe mich daher entschlossen auch meine Untersuchung heraus zu geben, wobei ich hoffe, dass die beiden Publikationen einander supplieren werden.

[1]) Transactions of the Amer. Mathem. Society Vol. 3. S. 388.

[2]) Math. Annalen, Bd. 67, S. 126 und Bd. 69, S. 218.

[3]) Math. Annalen, Bd. 77, S. 416.

[4]) Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Rk., Math. Naturv. Afd. I, 6. Auch kurz referiert im Jahresbericht d. D. M. V. 1907, Bd. 16, S. 196.

[5]) Inzwischen erschienen unter dem Titel: „Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularität“ in den Sitzungsbez. der Kgl. Bayr. Akad. d. W. Math. phys. Klasse 1916, S. 201.

Januar 1917.

§ 1. Allgemeine Sätze.

Eine ebene Elementarkurve ist eine reelle, stetige und geschlossene Kurve, die aus einer endlichen Zahl von Bögen zweiter Ordnung zusammengesezt ist. Ebenso ist eine gewundene Elementarkurve reel, stetig, geschlossen und aus einer endlichen Zahl von Bögen dritter Ordnung zusammengesetzt; diese Bögen nennen wir Elementarbögen. Wir setzen ferner voraus, dass die berührende Gerade und die oskulierende Ebene mit dem Berührungspunkt sich stetig ändert.

Die in dieser Arbeit betrachteten gewundenen Kurven n-ter Ordnung sollen den Maximalindex haben, d. h. sie sollen von jeder Ebene in n oder in $n-2$ Punkten geschnitten werden, wobei immer nur reelle Punkte in Betracht kommen, und zusammenfallende Punkte wie gewöhnlich gerechnet werden.

Jede gewundene Kurve dritter Ordnung hat den Maximalindex. Das Bild der Kurve R^3 auf eine Ebene aus einem Punkt P des Raumes (ausserhalb R^3) ist eine Kurve dritter Ordnung: Eine solche hat wie bekannt entweder drei Inflexionspunkte und dann keine Doppelpunkte oder Spitzen, oder auch nur einen Inflexionspunkt und dann entweder einen Doppelpunkt oder eine Spitze, das letztere nur, wenn durch P eine Tangente der Kurve geht. Das Bild aus einem Punkt der Kurve R^3 selbst ist zweiter Ordnung.

Das wesentliche in diesen Sätzen besteht im folgenden:

(1) Wenn ein Punkt P die Tangentenfläche der Kurve R^3 überschreitet (nicht in einem Punkt der Kurve selbst), dann und nur dann ändert sich die Zahl der durch P gehenden Doppelsekanten und oskulierenden Ebenen. Die Anderung ist für die Doppelsekanten $+1$ oder -1 und gleichzeitig damit für die oskulierenden Ebenen -2 oder $+2$.

Weil eine Raumkurve dritter Ordnung auch dritter Klasse ist, lässt sich das Dualitätsprincip anwenden, was keiner näheren Ausführung bedarf.

Wir gehen jetzt zu den allgemeinen Raumkurven R^n vom Maximalindex über. Weil R^n als Elementarkurve vorausgesetzt ist, wird auch ihr Bild C^n auf eine Ebene π eine Elementarkurve sein, und jeder Punkt M' von C^n ist, wenn kein innerer Punkt eines Elementarbogens, jedenfalls ein gemeinsamer Endpunkt zweier in M' zusammenstossenden Elementarbögen. Diese zwei Bögen berühren in M' eine und dieselbe Gerade m'. Eine in π liegende und m' beliebig naheliegende Gerade die durch M' geht, wird desshalb höchstens zwei M' beliebig naheliegende Punkte mit C^n gemein haben. Wenn das aber der Fall ist, kann man ersichtlich eine nicht durch M' gehende und m' naheliegende Gerade finden, die mit C^n höchstens einen M' naheliegende Punkt gemein hat. Jetzt sieht man leicht:

Eine oskulierende Ebene der Kurve kann nicht mehr denn drei zusammenfallende Punkte mit derselben gemein haben. (2)

Nehmen wir nämlich an, die oskulierende Ebene μ hätte in M vier zusammenfallende Punkte mit R^n gemein; μ wurde dann ausserhalb M noch höchstens $n-4$ Punkte mit R^n gemein haben. Projiciert man nun R^n aus einem von M verschiedenen Punkt von μ auf eine Ebene π, erhält man eine Kurve C^n, deren Tangente m' im Bilde M' von M ausserhalb M' höchstens $n-4$ Punkt mit C^n gemein hat. Man kann aber dem oben gesagten zufolge immer eine m' naheliegende Gerade m'_1 finden, welche höchstens einen M' naheliegenden Punkt mit C^n gemein hat, und die Gerade m'_1 würde also weniger als $n-2$ Punkte mit C^n gemein haben, was unseren Voraussetzungen wiederspricht.

Jetzt sieht man weiter:

Jeder Punkt M unserer Raumkurve R^n ist ein innerer Punkt eines Elementarbogens. (3)

Legen wir nämlich mit M' als Centrum eine Kugelfläche, und nehmen wir an, dass der innerhalb der Kugelfläche liegende Bogen von R^n sei nicht dritter Ordnung. Dann lege man eine koncentrische Kugelfläche mit dem Radius $\frac{1}{2}r$, und versuche, ob der durch dieselbe abgeschnittene Bogen dritter Ordnung sei, u. s. f. Nach einer endlichen Zahl von Versuchen muss man einen Bogen dritter Ordnung erhalten, weil sonst eine Ebene mehr als drei in M zusammenfallende Punkte mit R^n gemein haben würde.

Der obige Satz (2) kann man auch so aussprechen:

Eine Raumkurve vom Maximalindex kann keine hyperoskulierende Ebene haben. (2*)

Ferner hat man auch:

Eine Raumkurve vom Maximalindex kann keine doppelberührende Ebene haben. (4)

Hätte nämlich R^n eine doppelberührende Ebene α, dann würde das ebene Bild C^n von R^n aus einem Punkt von α eine Doppeltangente t' haben, und man könnte in der Bildebene t' naheliegende Gerade finden, welche höchstens $n-4$ Punkte mit C^n gemein haben würden.

Weil nun die Zahl der durch einen Punkt P gehenden Doppelsekanten von R^n sich infolge (4) nicht durch Überschreiten einer doppel umschriebenen Devellopablen, und infolge (2*) die Zahl der durch P gehenden oskulierenden Ebenen sich nicht durch Überschreiten einer hyperoskulierenden Ebene ändern kann, folgt aus (3), dass die Aussagen im Satz (1) nach gültig bleiben, wenn man R^3 durch R^n ersetzt.

Wir bemerken nach den folgenden kleinen Satz:

(5) Jede durch eine Tangente t von R^n gehende nicht oskulierende Ebene schneidet ausserhalb des Berührungspunktes in $n-2$ Punkten.

Projiciert man nämlich die Kurve aus einem Punkte von t (nicht aus M), erhält das ebene Bild C^n eine Spitze im Spur T von t. Eine durch T gehende in der Bildebene liegende nicht mit der Tangente in T zusammenfallende Gerade m muss nun ausserhalb T immer $n-2$ Punkte mit n gemein haben. Nicht mehr, weil die Kurve n-ter Ordnung ist, und nicht weniger, weil der Index $n-2$ ist; man sieht dies sogleich durch Betrachtung von Nachbargeraden zu m.

Weil das ebene Bild der Kurve nicht zwei Spitzen haben kann, ist ein Cuspidalpunkt auf der gewundenen Kurve nicht möglich; dagegen spricht nichts gegen das Auftreten von Doppelpunkten.

§ 2. Die zwei Gattungen von Kurven mit dem Maximalindex, die auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegen.

Eine Regelfläche zweiter Ordnung, oder wie wir im folgenden oft kurz sagen wollen, eine Regelfläche enthält zwei Systeme von Geraden, die wir als Erzeuger f und Erzeuger g bezeichnen wollen. Aus dem obigen Satz (4) folgt, dass ein Erzeuger f und ein Erzeuger g nicht beide die Kurve berühren können; dagegen ist es sehr wohl möglich, dass ein Erzeuger des einen Systems die Kurve berühren kann.

Wir wollen nun erst den Fall in Betracht nehmen, dass überhaupt kein Erzeuger die Kurve R^n berührt. Zwei beliebige f — und ebenso zwei beliebige g — müssen dann dieselbe Zahl von Punkten mit der Kurve gemein haben, es möge jeder Erzeuger f p Punkte und jeder Erzeuger g q Punkte mit R^n gemein haben. Zwischen diesen Zahlen besteht die Relation:

(6) $$p+q=n.$$

Betrachtet man nämlich ein Erzeuger f_1 und ein Erzeuger g_1, die beide durch denselben Punkt M von R_n gehen, dann enthält die Ebene $(f_1\, g_1)$ die Tangente in M, und wird desshalb infolge Satz (5) ausser M nach $n-2$ Punkte mit R_n gemein haben. Eine Ebene, die durch zwei bzw. f_1 und g_1 naheliegende Erzeuger geht, schneidet also R^n in n Punkten.

Man bemerke noch, dass wenn ein Erzeuger z. B. f die Kurve in den Punkten $M_1\, M_2 \ldots M_n$ schneidet, dann alle diese zusammengehörige Punkte in demselben Sinn auf der Kurve laufen müssen. Wenn nämlich M_1 in einem bestimmten Sinn läuft, muss auch z. B. M_2 dies thun, weil sonst eine Ebene $(f\, g)$ in speziellen Lagen mehr als n Punkte mit R^n gemein haben würde. Dass aber M_1 und M_2 nicht immer in entgegengesetzten Sinn laufen können, folgt daraus, dass Zusammenfall von M_1 und M_2 ausgeschlossen ist.

Wir wollen nun untersuchen, ob die hier betrachteten Kurven Doppelpunkte haben können. Hierzu gebrauchen wir den folgenden Hilfsatz:

Die Tangenten t_1 und t_2 in einem Doppelpunkt O einer auf einer Regelfläche liegenden gewundenen Kurve R vom Maximalindex trennen die zwei durch O gehenden Erzeuger der Fläche. (7)

Projiciert man nämlich die Kurve auf eine Ebene aus einem Punkt P, welcher in der in O berührenden Ebene liegt, aber nicht in einer der Tangenten t_1 und t_2, dann gehen durch das Bild O' von O zwei sich berührende Bögen α' und β' von C^n. Diese können nicht beide auf einer und derselben Seite der in O' beide Bögen berührenden Tangente t' liegen, denn dann würde man ersichtlich zwei durch P gehende und (Ot') naheliegende Ebenen finden können, von welchen die eine die Kurve in vier Punkten mehr als die andere schneiden würde. Die Bögen α' und β' liegen also auf verschiedenen Seiten von t'. Aber t' ist das Bild eines Erzeugers f_1 und ebenso eines Erzeugers g_1, welche das O naheliegende Stück der Fläche in zwei Gebiete zerlegt, von welche das eine — wenn t' horizontal gedacht wird — oberhalb (Ot'), das andere unterhalb (Ot') liegt. Desshalb werden die O benachbarten Theile der zwei durch O gehenden Kurvenbögen α und β verschiedenen Gebieten angehören, so dass t_1 und t_2 durch f_1 und g_1 getrennt sind.

Jetzt können wir sehen:

Eine auf einer Regelfläche liegende R^n, die von keinem Erzeuger der Fläche berührt wird, hat keine Doppelpunkte. (8)

Denken wir uns die Kurve R^n habe einen Doppelpunkt O. Es muss dann erstens sowohl p wie q mindestens zwei sein. Durch einen Punkt M_1, der in der Nähe von O auf einem der durch O gehenden Bögen α und β z. B. auf α gewählt wird, gehen zwei Erzeuger f_1 und g_1. Diese schneiden den anderen Bogen β bzw. in zwei Punkten N_1 und N_2. Einer obigen Bemerkung zufolge laufen auf der Kurve M_1 und N_1 und ebenso M_1 und N_2 in demselben Sinn; also müssen auch N_1 und N_2 von O aus auf β in demselben Sinn laufen, d. h. N_1 und N_2 müssen auf derselben Seite von O liegen. Aber konvergiert nun M_1 gegen O, dann konvergieren die Gerade ON_1 und ON_2 gegen die Kurventangenten t_1 und t_2 in O, und man sieht, dass f_1 und g_1 gegen Grenzstellungen konvergieren, die beide in einem und demselben durch t_1 und t_2 bestimmten Winkelraum fallen. Das streitet aber gegen den vorigen Satz (7), so dass unsere Kurve keine Doppelpunkte haben kann.

Wir wollen nun die zweite Möglichkeit in Betracht ziehen, wo ein Erzeuger der einen Art, sagen wir ein Erzeuger g_1, die Kurve R^n berührt. Eine beliebige durch g_1 gehende Ebene μ schneidet noch in $n-2$ von dem Berührungspunkt verschiedenen Punkten, und diese müssen auf der Geraden f_1 liegen, in der μ die Fläche noch schneidet. Jeder Erzeuger f hat also in diesem Fall $n-2$ Punkte mit der Kurve gemein. Desshalb muss jede durch f gehende Ebene μ ausserhalb f entweder keine oder auch zwei Punkte N_1 und N_2 mit R^n gemein haben. Diese

Punkte sind gegenseitig eindeutig mit einander verbunden und laufen in entgegengesetzten Sinn; das letztere folgt daraus, dass dies der Fall ist, wenn μ in der Nähe der R^n berührenden Eberne (fg_1) ist. Weil desshalb N_1 und N_2 zwei Mal zuzammenfallen müssen, hat man:

(9) Berührt ein Erzeuger g die Kurve R^n, dann giebt es zwei berührende Erzeuger g. Jeder Erzeuger f schneidet R^n in $n-2$ Punkten, während ein Erzeuger f entweder zwei (getrennte oder zusammenfallende) Punkte oder auch keinen Punkt mit der Kurve gemein hat.

Wir können nun beweisen, dass die Kurve Doppelpunkte haben muss. Durch einen beliebigen Punkt M der Kurve geht eine Gerade f, die noch in $n-3$ Punkten $N_1 N_2 \ldots N_{n-3}$ und eine Gerade g, die noch in einem Punkt P schneidet. Jedem Punkt der Kurve als ein Punkt N aufgefasst entsprechen also $n-3$ Punkte P, als ein Punkt P aufgefasst auch $n-3$ Punkte N. Wenn wir nun wüssten, dass P immer in entgegengesetzten Sinn von N laüft, dann würden P und N $2(n-3)$ Mal zusammenfallen. Aber nach einer früheren Bemerkung laüft M in denselben Sinn wie alle Punkte N, und lässt man M in einem Berührungspunkt S mit einer Geraden g seinen Lauf beginnen, sieht man M und P hier im entgegengesetzten Sinn laufen. Desshalb laufen alle Punkte N im entgegengesetzten Sinn von P. Weil nun jeder Doppelpunkt zweimal als Zusammenfallspunkt zu rechnen ist, hat man:

(10) Jede auf einer Regelfläche liegende Kurve R^n, die von zwei Erzeugern der Fläche berührt wird, hat $n-3$ Doppelpunkte.

Es giebt also zwei mögliche Gattungen von Kurven n-ter Ordnung mit dem Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung. Die eine, die Kurve erster Gattung hat keine Doppelpunkte, jeder Erzeuger des einen Systems schneidet die Kurve in p Punkten, jeder Erzeuger des zweiten Systems in q Punkten, wo $p+q=n$. Ob nun p und q alle mit dieser Bedingung vereinbare Werthe annehmen kann, bleibt bis weiter dahingestellt. Eine Kurve der zweiten Gattung hat $n-3$ Doppelpunkte; jeder Erzeuger des einen Systems schneidet dieselbe in $n-2$ Punkten, jeder Erzeuger des anderen Systems in zwei Punkten, oder auch schneidet sie nicht.

§ 3. Die Projektionen der Kurven.

Wir wollen nun die Projektionen der von uns betrachteten Kurven auf eine Ebene π bestimmen, und nehmen erst die Kurven erster Gattung. Den Augenpunkt P wählen wir auf der Regelfläche, aber ausserhalb der Kurve. Sind F und G die Spuren der durch P gehenden Erzeuger f und g, wird die Projektion eine ebene C^n, F ein p-facher, G ein q-facher Punkt derselben. Sämtliche Tangenten in F sowie in G sind getrennt. Weder durch F noch durch G gehen Tangenten, welche bzw. ausserhalb F und G berühren. Lassen wir einen Punkt einen Theil der Kurve durchlaufen von F aus, bis er wieder in F gelangt, nennen wir den durchlaufenen Teil einen *von F ausgehenden Pseudozweig* der Kurve. Die zwei Tangenten derselben in F sind getrennt, indem die Kurve sich sonst in getrennte Zweige auflöst, *was wir auslassen*. Der Pseudozweig hat in F einen Winkelpunkt; von diesen giebt es drei Arten, die ich als Winkelpunkte erster, zweiter oder dritter Art bezeichne (siehe Fig. 1, 2 und 3). Ist l eine durch einen Winkelpunkt O gehende Gerade der Art, dass eine l beliebig naheliegende Gerade den Zweig in zwei O naheliegenden Punkten schneiden kann, dann nennt man l eine uneigentliche Tangente des Zweiges; l schneidet in diesem Fall den Zweig in zwei in O zusammenfallenden Punkten. Eine durch einen Winkelpunkt gehende Gerade, die keine uneigentliche Tangente ist, schneidet den Zweig nur einmal in O.

Es sei nun φ ein von F ausgehender Pseudozweig, der nicht durch G geht. Dieser Zweig hat ausserhalb F keinen Punkt mit der Geraden FG gemein, und F muss als ein einfacher Schnittpunkt mit dieser Geraden gerechnet werden; GF kann nämlich keine durch G gehende uneigentliche Tangente sein, denn an φ gehen jedenfalls aus G keine andere eigentliche oder uneigentliche Tangente als möglicherweise GF, aber die letztere kann aueh nicht Tangente sein, weil die Zahl der aus einem Punkt an eine Kurve ohne Spitzen gehenden eigentlichen und uneigentlichen Tangenten immer paar sein muss. Die Kurve φ ist also unpaar. Indem wir bis weiter $p > q$ voraussetzen, giebt es sicher solche unpaare Zweige φ.

Betrachten wir jetzt einen von F ausgehenden Pseudozweig ψ, der durch G geht. Wenn dies der Fall ist, kann man wieder von G aus ψ in Pseudozweige zerlegen. Von diesen wird einer und nur einer durch F gehen, weil F ein einfacher Punkt von ψ ist; die übrigen $\psi_1 \psi_2 \ldots$ müssen aber unpaar sein, was man ganz so sieht, wie bei den oben genannten Zweigen φ. Ein Zweig φ und ein Zweig ψ_1, die weder in F noch in G Punkte mit einander gemein haben, müssen desshalb einander ausserhalb F und G schneiden. Das ist aber unmöglich, denn die Kurve C^n hat ausserhalb F und G keine Doppelpunkte. Ein von F ausgehender und G enthaltender Pseudozweig ψ hat also in G keinen mehrfachen Punkt. Weil ferner GF keine aus G an ψ gehende uneigentliche Tangente sein kann — was man wieder ganz wie oben sieht — muss auch F ein einfacher Schnittpunkt von ψ mit der Geraden FG sein, so dass ψ also eine paare Kurve ist. Runden wir jetzt den Winkelpunkt F ab, so wie es in Fig. 1, 2, 3 durch punktierte Bögen hinreichend deutlich angegeben ist, erhält man aus ψ eine auch als Tangentengebilde stetige paare Kurve ohne Doppelpunkte, Spitzen und Doppeltangenten; dass durch die Abrundung keine neue Doppeltangenten auftreten, folgt daraus, dass durch F keine Tangenten an ψ gehen. Eine solche wie gesagt paare Kurve muss aber, wie ich früher angegeben habe, eine Kurve zweiter Ordnung sein[1]).

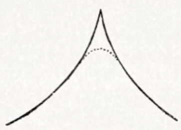
Fig. 1.


Fig. 2.


Fig. 3.

[1]) Siehe: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven. Det Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturv. og math. Afd., XI, 2, 1914, S. 22.

Nach Aufhebung der Abrundung bleibt der Zweig immer zweiter Ordnung, erhält aber einen Winkelpunkt in F.

Betrachten wir jetzt zwei von F ausgehende G enthaltende Pseudozweige ψ_1 und ψ_2. Die zwei Paare von Tangenten in F an diese Zweige werden einander entweder trennen oder nicht trennen. Runden wir nun die in F auftretenden Winkelpunkte von ψ_1 und ψ_2 ab, dann erhalten wir im erstgenannten Falle zwei Kurven, die in F — sowie selbstverständlich auch in G — einen einfachen Punkt mit einander gemein haben. Zwei Kurven zweiter Ordnung, die einander in zwei Punkten schneiden, haben aber immer auch zwei Tangenten mit einander gemein, und diese können nicht wieder verschwinden, wenn die Abrundung aufgehoben wird, weil, wie ich wiederhole, durch F keine ausserhalb F berührende Tangenten an ψ_1 oder ψ_2 gehen. Desshalb können zwei Kurven ψ nicht vorhanden sein, denn die Kurve C^n hat keine Doppeltangenten.

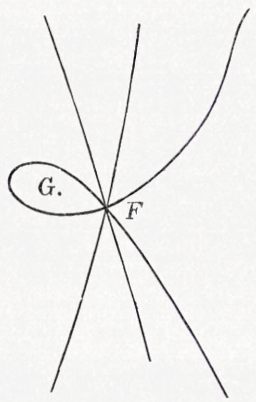

Fig. 4.

Wenn im zweiten Fall die zwei Paare von Tangenten in F einander trennen, dann kann man die Abrundungen in F so vornehmen, dass ψ_1 und ψ_2 nach der Abrundung keinen Punkt in unmittelbarer Nähe an F mit einander gemein haben. Sie schneiden ober einander in G, und müssen demnach mindestens noch einen Schnittpunkt haben. Das ist aber auch unmöglich, denn C^n hat ausser F und G keine mehrfache Punkte.

Wir haben also bewiesen, dass nur e i n von F ausgehender Pseudozweig durch G gehen kann, und dass dieser Zweig zweiter Ordnung ist.

Bei alledem haben wir freilich vorausgesetzt, dass $p > q$. Wir haben diese Voraussetzung nur dazu benutzt, um das Vorhandensein von Pseudozweigen φ zu sichern, die von F ausgeben ohne durch G zu gehen. Wenn das aber nicht der Fall ist, dann wird, eben weil $p = q$, jeder von F ausgehender und G enthaltender Pseudozweig ψ nur einmal durch G gehen, und dann bleibt alles wie vorhin, aus dem hervorgeht, dass in diesem Fall $p = q = 1$. Wenn wir also den triviellen Fall $p = q = 1$ auslassen, dann ist $p = q$ unmöglich.

Wir haben also endlich gefunden:

(11) Eine auf einer Regelfläche liegende Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und ohne Doppelpunkte schneidet jeden Erzeuger des einen Systems in $n-1$ Punkten und jeden Erzeuger des zweiten Systems in einem Punkt.

Nehmen wir nun das Projektionscentrum P auf der Kurve selbst; die Projektion C^{n-1} ist dann eine Kurve $(n-1)$ ter Ordnung, die in F einen $(n-2)$ fachen Punkt hat. Die von F ausgehenden Pseudozweige, sind theils $n-3$ unpaare, theils ein paarer, welche durch den Spur P_1 der in P berührenden Tangente geht. Weil nämlich aus P_1 keine Tangente an C^{n-1} geht, kann man in den obigen Schlüssen G einfach mit P_1 ersetzen. Dass der paare Zweig zweiter Ordnung ist, haben wir schon gesehen. Aber es ist wesentlich noch hinzu zu fügen, dass jeder unpaarer Zweig dritter Ordnung ist. Hätte nämlich eine derselben 4 Punkte mit einer Geraden gemein, dann würde diese mit der ganzen Kurve C^{n-1} wenigstens $4+n-4=n$ Punkte gemein haben. Man hat also:

Die Projektion einer auf einer Regelfläche liegenden Kurve n-ter Ordnung vom Maximalidex und ohne Doppelpunkte aus einem Punkt der Kurve hat in einem Punkt F einen $(n-2)$ fachen Punkt und kann in $(n-3)$ von F ausgehende Pseudozweige dritter Ordnung und einen Pseudozweig zweiter Ordnung zerlegt werden. (12)

Wir gehen nun zu den Kurven R^n mit Doppelpunkten über. Hier ist die Sache insofern wesentlich einfacher, als wir in diesem Fall im Voraus wissen, dass alle Erzeuger des einen Systems, sagen wir alle Erzeuger f die Kurve in $n-2$ Punkten schneiden, während ein Erzeuger g entweder keinen, oder auch zwei Punkte mit R^n gemein hat. Wir wollen die Projektion C^{n-1} der Kurve aus einem Punkt P der Kurve selbst untersuchen. Dieselbe hat in der Spur F des durch P gehenden Erzeugers f_1 einen $(n-3)$ fachen Punkt, und geht sowohl durch die Spur G des durch P gehenden Erzeugers G, sowie auch durch die Spur P_1 der in P berührenden Tangente. Indem wir nun wie früher C^{n-1} in Pseudozweige zerlegen, die von F ausgehen, wird von diesen ein Pseudozweig durch G und ebenso ein durch P_1 gehen. Wir können aber zeigen, dass diese zwei zusammenfallen müssen. Aus G geht nämlich, weil kein f die Kurve berührt, keine andere eigentliche Tangenten an C^{n-1} als die zwei zusammenfallenden, die in G berühren. Weil nun jedenfalls die Zahl der aus einen Punkt gehenden (eigentlichen und uneigentlichen) Tangenten paar sein muss, kann die Gerade GF keine uneigentliche Tangente in F sein, d. h. es soll F als Schnittpunkt der Geraden GF mit einer beliebigen der genannten Pseudozweige als ein einfacher Schnittpunkt gerechnet werden. Die Punkte F, G und P_1 liegen in einer Geraden. Wenn nun der durch G gehende Pseudozweig φ_1 nicht durch P_1 gehen würde, dann wäre φ_1 paar und alle übrigen Pseudozweige unpaar. Wenn also φ_1 nicht durch P_1 geht, wird eine durch P_1 gehende und F naheliegende Gerade φ_1 in zwei Punkten, den durch P_1 gehenden unpaaren Pseudozweig in mindestens drei Punkten und die übrigen in mindestens $n-5$ Punkten schneiden. Das ist aber unmöglich, weil C^{n-1} $(n-1)$ ter Ordnung ist. Der Zweig φ_1 geht also durch beide Punkte G und P_1 und muss auch unpaar sein. C^{n-1} lässt sich also in $n-3$ unpaare von F ausgehenden Pseudozweige zerlegen, und alle diese müssen dritter Ordnung sein;

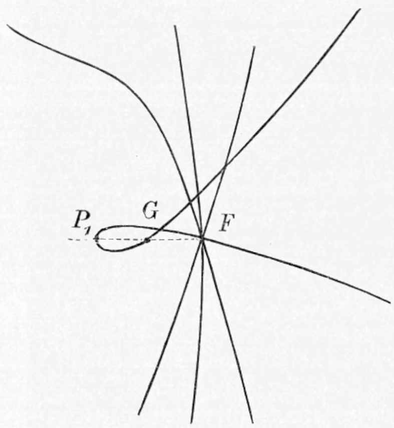

Fig. 5.

eine Gerade, die vier Punkte mit einem der Zweige gemein hätte, würde nämlich $4+n-4=n$ Punkte mit C^{n-1} gemein haben. Aber wir sehen nochmehr, dass der durch G und P_1 gehende Pseudozweig einen Doppelpunkt haben muss. Aus einem beliebigen Punkt M einer Kurve dritter Ordnung φ gehen nämlich, wenn keine Winkelpunkte oder Doppelpunkte vorhanden sind, immer zwei Tangenten an φ, welche (wenn M kein Inflexionspunkt ist) ausserhalb M berühren. Hier hat die Kurve φ_1 freilich einen Winkelpunkt F, aber MF ist nur einmal als uneigentliche Tangente zu rechnen. Weil nun aus G keine ausserhalb G berührende Tangente an φ_1 gebt, muss diese einen Doppelpunkt haben, und G auf dem φ_1 zugehörigen Oval liegen. Aber dann muss auch P_1 auf dem Oval liegen, weil F jedenfalls dem Oval nicht angehören kann. Kein anderer Zweig als φ_1 kann einen Doppelpunkt haben denn die Verbindungssgraden zweier solchen würde $4+2+n-5=n+1$ Punkte mit C^{n-1} gemein haben.

Wir haben also bewiesen:

(13) Die Projektion einer auf einer Regelfläche liegenden Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex und mit Doppelpunkten aus einem Punkt der Kurve hat einen $n-3$ fachen Punkt F und lässt sich in $n-3$ von F ausgehende Pseudozweige dritter Ordnung zerlegen, von welchen ein und nur ein einen Doppelpunkt hat.

---

§ 4. Die charakteristischen Zahlen der Kurven.

Die charakteristischen Zahlen einer Elementarkurve sind dieselben, die man die Plückerschen Zahlen der algebraischen Kurven nennt, wenn man nur reelle Elemente in Betracht zieht. Die Klasse n' ist also die grösste Zahl der durch einen Punkt des Raumes gehenden oskulierenden Ebenen; ebenso sind Ordnung n, Rang r und h zu definieren; h ist die grösste Zahl der durch einen Punkt des Raumes gehenden Doppelsekanten. Zugleich werde ich im folgenden angeben, welche Werthe kleiner als den Maximalwerth die angegebenen Zahlen annehmen können. Die Zahlen lassen sich für die algebraischen Kurven einfach aus der in der Einleitung genannten Abhandlung von Miss Angas Scott ableiten; es zeigt sich aber sehr hübsch, dass ihre Bestimmung von dem algebraischen Charakter der Fläche gänzlich unabhängig ist.

Wir wollen zuerst die Zahl der durch einen Punkt P gehenden Doppelsekanten finden, und müssen uns demnach erst klar machen, wo und wie sieh diese Zahl mit der Lage von P ändert. Hier wo keine doppel umgeschriebene Devellopable und keine hyperoskulierende (stationäre) Ebene vorhanden ist, kann die Zahl sich nur ändern, wenn P die Tangentenfläche der Kurve entweder in einem allgemeinen Punkt oder in einem Punkt M der Kurve R^n überschreitet. Die Tangente in M nennen wir m. Durch Überschreiten der Tangentfläche in einem nicht in R^n liegenden Punkt, wird eine durch P gehende Doppelsekante gewonnen oder verloren, wie wir früher in § 1 gesehen haben. Lassen wir nun P die Kurve in einem Punkt M überschreiten, indem P sich z. B. einer Geraden l entlang fortbewegt. Jene Doppelsekanten, deren Schnittpunkte mit der Kurve beide in endlicher Entfernung von M liegen, werden hierdurch nicht gestört. Aber jene Doppelsekanten, von deren Schnittpunkten mit R^n der eine gleichzeitig mit P nach M konvergiert, werden nach jenen Geraden konvergieren, die M mit den von M verschiedenen Schnittpunkten der Kurve mit der Ebene (lm) verbinden. Ebenso viele Doppelsekanten trennen sich aus, wenn P einer Geraden l entlang sich, in dem einen oder in dem anderen Sinn, von M entfernt. Ersetzt man l durch die Tangente m, hat man die Ebene (lm) durch die in M oskulierende Ebene zu ersetzen.

Denken wir uns nun P auf der Kurve R^n liegend, und betrachten wir erst die Kurve ohne Doppelpunkte. Durch P geht dann eine $(n-2)$ fache Doppelsekante und keine andere Doppelsekanten. Geht nun P von der Kurve aus einer Tangente m entlang, trennen sich $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Doppelsekanten aus; aber dazu kommen noch $n-3$ neue Doppelsekanten, weil die in M oskulierende Ebene ausserhalb M noch $n-3$ Punkte mit R^n gemein hat. Man erhält so, wenn man die durch P gehende Tangente m nicht mitrechnet, $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+n-3=$

$$\frac{1}{2}n(n-3)$$

Doppeltangenten aus einem Punkt der Tangentenfläche. Weil P dem früheren zufolge aus einem beliebigen Punkt des Raumes zur Tangentenfläche gelangen kann, oder dass dabei sich die Zahl der durch P gehenden Doppelsekanten ändert, hat man also:

Aus einem beliebigen Punkt des Raumes gehen an eine R^n ohne Doppelpunkte entweder $\frac{1}{2}n(n-3)$ oder auch $\frac{1}{2}n(n-3)+1$ Doppelsekanten. (14)

Betrachten wir nun die Kurve R^n mit Doppelpunkten. Hier ist der einzige Unterschied vom obigen der, dass man den $n-2$ fachen Erzeuger durch einen $n-3$ fachen zu ersetzen hat. Man erhält so $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)+n-3=$

$$\frac{1}{2}(n-3)(n-2)$$

Doppelsekanten, die durch einen allgemeinen Punkt der Tangentenfläche gehen. Also hat man:

Aus einem beliebigen Punkt des Raumes gehen an eine R^n mit Doppelpunkten entweder $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ oder auch $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$ Doppelsekanten. (15)

Die Projektion der Kurve R^n hat also dieselbe Zahl von Doppelpunkten, gleichviel, ob R^n im Raume Doppelpunkte hat oder nicht.

Wir wollen nun die Zahl e' der durch einen Punkt P gehenden Oskulationsebenen bestimmen. Aus dem in § 1 gesagten folgt, dass eine Änderung in der Zahl e' nur durch Überschreiten der Tangentenfläche ausserhalb der Kurve stattfinden kann. Betrachten wir nun erst die Kurve ohne Doppelpunkte. Die Projektion derselben aus einem Punkt der Kurve haben wir früher in $n-3$ von einem Punkt F ausgehende Pseudozweige dritter Ordnung und einen Pseudozweig zweiter Ordnung zerlegt. Alle diese haben in F einen Winkelpunkt. Es giebt aber, wie schon oben bemerkt, drei Arten von Winkelpunkten. Rundet man dieselben ab, so wie es in Fig. 1, 2, 3 (S. 9) durch punktierte Bögen angedeutet ist, so enstehen in der Nähe von F zwei Inflexionspunkte, wenn der Winkelpunkt erster Art ist, einen, wenn der Winkelpunkt zweiter, aber keinen, wenn dieser dritter Art ist. Weil nun eine stetige und geschlossene Elementarkurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkte und Winkelpunkte immer drei Inflexionspunkte hat, wird eine Kurve dritter Ordnung mit einem Winkelpunkt erster, zweiter oder dritter Art bzw. einen, zwei oder drei Inflexionspunkte haben. Ferner sieht man, dass aus F an die Kurve dritter Ordnung entweder keine, eine oder zwei ausserhalb F berührende Tangenten gehen, jenachdem F ein Winkelpunkt erster, zweiter oder dritter Art ist.

Man sieht nun, dass in unserem Fall der Punkt F ein Winkelpunkt erster Art auf jedem Pseudozweig sein muss, denn aus F gehen keine Tangenten an C^{n-1} und also auch keine an einen Zweig von C^{n-1}. Weil der Zweig zweiter Ordnung keinen Inflexionspunkt haben kann, wird C^{n-1} also $n-3$ Inflexionspunkte haben. Aus einem Punkt M der Raumkurve R^n gehen also $n-3$ ausserhalb M berührende oskulierende Ebenen. Wenn nun ein Punkt P sich von M aus auf der in M berührenden Geraden m bewegt, treten im ersten Augenblick eine neue Oskulationsebene hervor; man sieht dies sogleich, wenn man durch m eine R^n nicht oskulierende Ebene μ liegt, denn der Schnitt von μ mit der Tangentenfläche der Kurve hat in M einen Inflexionspunkt. Aus jedem allgemeinen Punkt P der Tangentenfläche gehen desshalb, wenn die m enthaltende oskulierende Ebene nicht mitgerechnet wird, $n-2$ oskulierende Ebenen. Weil man nun aus jedem Punkte des Raumes an die Tangentenfläche ohne Änderung von e' gelangen kann, ist e' überall entweder n oder $n-2$.

Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn R^n Doppelpunkte hat. Der Unterschied ist nur der, dass hier die Projektion der Kurve aus einem Punkt derselben, sich in $n-3$ von F ausgehenden Pseudozweige zerlegt. Von diesen hat der eine φ_1 einen Doppelpunkt und einen Winkelpunkt F aus dem zwei ausserhalb F berührende Tangenten gehen. Es hat dann φ_1 einen Inflexionspunkt, und die übrigen auch je einen, was man ganz wie im ersten Fall sieht. Man hat also:

(16) Aus einem Punkt des Raumes gehen an die Kurve entweder n oder $n-2$ oskulierende Ebenen, gleichviel ob die Kurve Doppelpunkte hat oder nicht.

Endlich wollen wir die Zahl r der Kurventangenten finden, welche eine Gerade l des Raumes schneiden, und betrachten die Kurve ohne Doppelpunkte:

Erstens nehmen wir an, dass l durch einen Punkt M der Kurve geht. Die Projektion C^{n-1} derselben aus M auf eine Ebene π kennen wir, und es kommt darauf an die Klasse von C^{n-1} zu bestimmen. Wenn aber ein Punkt Q sich in π bewegt, kann die Zahl der durch P gehenden Tangenten sich nur dann ändern, wenn Q entweder C^{n-1} oder eine Wendetangente derselben überschreitet.

Aus einem Punkt Q_1 im Inneren des paaren Pseudozweiges gehen keine Tangenten an C^{n-1} — eine solche würde $2+3+n-5=n$ Punkte mit C^{n-1} gemein haben. Verbindet man Q_1 mit einem beliebigen Q von π durch eine Gerade p, schneidet diese die Kurve in $n-1$ Punkten und die Wendetangenten derselben in $n-3$ Punkten. Wenn Q der Geraden l entlang von Q_1 ausgeht und wieder zu Q_1 zurückkommt, mögen x Mal zwei durch Q gehende Tangenten gewonnen und y Mal zwei verloren werden. Man hat dann

$$x-y=0, \quad x+y=2n-4,$$

also $x=y=n-2$. Die grösste Zahl den r durch Q gehenden Tangenten erhalt man, wenn die x Schnitpunkte auf einander folgen; man hat also $r \leq 2n-4$. Aber dieses Maximum kann auch erreicht werden. Den Punkt Q_1 innerhalb des paaren Zweiges können wir nämlich so nahe an F wählen, dass es einen Sinn hat zu sagen, dass Q_1 auf der konvexen oder auf der nicht konvexen Seite eines durch F gehenden Kurvenbogens liegt. Durch einen Punkt in der Nähe eines Kurvenbogens auf dessen konvexen Seite gehen zwei Tangenten an den Bogen, sonst keine. Durch Q_1 gehen nun keine Tangenten an C^{n-1}, und Q_1 muss deshalb auf der nicht konvexen Seite jedes durch F gehenden Bogens liegen. Der zu Q_1 in Beziehung zu F symmetrische Punkt Q_2 liegt desshalb auf der konvexen Seite der Bögen, und durch Q_2 gehen demnach $2n-4$ Tangenten an C^{n-1}. Drehen wir die Gerade Q_2F einen kleinen Winkel um Q_2 in l_2, dann wird ein Punkt P, indem er die Gerade l_2 durchläuft, jeden durch F gehenden Bogen einmal schneiden, und man sieht, dass durch P 2, 4, 6 . . . $2n-4$ Tangenten an C^{n-1} gehen, jenachdem P einen, zwei . . . oder auch $n-2$ Kurvenbögen überschritten hat. Indem wir die Gerade Q_2M einen kleinen passend gewählten Winkel um Q_2 drehen, sieht man, dass es Gerade des Raumes giebt, die von 2, 4 . . . $2n-2$ Kurventangenten geschnitten werden.

Zweitens betrachten wir eine in einer oskulierenden Ebene μ liegende Gerade l. Diese möge die in μ liegende und in M berührende Tangente in einem Punkt N schneiden. Die Ebene μ schneidet R^n ausser in M noch in $n-3$ anderen Punkten $M_1, M_2 \ldots M_{n-3}$, und durch N gehen infolge (16) ausser μ nach $n-3$ oskulierende Ebenen $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n-3}$. Wir drehen jetzt in μ eine Gerade l um N. Die Zahl der l schneidenden Tangenten kann sich nur ändern, wenn l entweder eine der Geraden NM_r oder eine der Geraden $(\mu\mu_r)$ überschreitet, und zwar werden hierdurch entweder zwei schneidende Tangente gewonnen oder verloren. Indem l sich 360° um N dreht, mögen an x Stellen zwei schneidende Tangenten gewonnen und an y Stellen verloren werden. Man hat dann

$$x-y=0, \quad x+y=2n-6,$$

also $x=n-3$. Weil nun die Projektion von R^n aus N eine Spitze im Bilde von M haben wird, sieht man, dass eine in μ liegende Gerade ausser l höchstens $2(n-3)+2$ Tangenten der Kurve schneiden kann.

Es sei endlich l eine beliebige Gerade des Raumes. Durch l lege man eine feste Ebene λ, in l wähle man einen festen Punkt N. Drehen wir eine Gerade l in λ um N, kann die die Zahl der l schneidenden Tangenten sich nur dann ändern, wenn l entweder ein Verbindungsgrade von N mit einem Schnittpunkt von R^n mit λ, oder wenn sie eine durch N gehende oskulierende Ebene überschreitet. In jedem diesen Fällen geht aber dem obigen zufolge die genannte Zahl entweder von $2n-4$ zu $2n-2$ — oder umgekehrt — oder auch sind die Zahlen kleiner. Hieraus folgt, dass keine Gerade l des Raumes mehr denn $2n-2$ Tangenten der Kurve schneidet.

Die Kurve mit Doppelpunkten lässt sich mit geringfügigen Änderungen ganz ebenso behandeln. Man muss nur den oben mit Q bezeichneten Punkt, der dort innerhalb des paaren Zweiges gewählt war, hier innerhalb des Ovales eines von F ausgehenden unpaaren Zweiges wählen.

Man hat also:

(17) Eine Gerade des Raumes schneidet höchstens $2n-2$ Tangenten der Kurve; es giebt aber Gerade, welche von $0, 2, 4, 6 \ldots 2n-2$ Kurventangenten geschnitten werden.

Die zwei ganz verschiedenen Gattungen von Kurven n-ter Ordnung vom Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung haben also dieselbe Klasse und denselben Rang.

---

§ 5. Die Existenz der Kurven.

In § 2 haben wir die zwei möglichen Gattungen von Kurven n-ter Ordnung vom Maximalindex angegeben, die auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegen können. Aber wir mangeln nach die umgekehrten Sätze darzuthun, nämlich:

(18) Jede auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegende Kurve n-ter Ordnung, die von jedem Erzeuger f den einen Systems in $n-1$ Punkten geschnitten wird, ist vom Maximalindex

und

(19) Jede auf einer Regelfläche zweiter Ordnung liegende Kurve n-ter Ordnung, die von jedem Erzeuger f des einen Systems in $n-2$ Punkten, und von jedem Erzeuger des anderen Systems entweder in zwei Punkten oder auch in keinem Punkt geschnitten wird, hat den Maximalindex.

Man hat um diese Sätze zu beweisen nur zu zeigen, dass zwei Tangenten mit getrennten Berührungspunkten einanden nicht schneiden können, und dass die Kurve keine hyperoskulierende Ebene haben kann.

Betrachten wir erst eine Kurve R^n der ersten Gattung und bilden wir die Projektion C^{n-1} derselben aus einem Punkt P der Kurve. Diese hat in dem oft früher genannten Punkt F einen $n-1$-fachen Punkt und geht einmal durch die Spur P_1 der in P berührenden Geraden. Aus dem auf der Geraden FP_1 liegenden Punkt G gehen keine Tangente an C^{n-1}, desshalb wird die Gerade GF keine uneigentliche Tangente an irgend eine der von F ausgehenden Pseudozweige sein. Aus den Entwickelungen in § 3 folgt dann, dass alle diese Pseudozweige unpaar und zwar dritter Ordnung sind mit Ausnahme des einen, durch P_1 gehenden. Dieser letztere muss zweiter Ordnung sein, und aus P_1 kann keine Tangente an C^{n-1} gehen, weil eine solche mehr denn $n-1$ Punkte mit C^{n-1} gemein haben würde. Die Tangente in P kann also keine andere nicht in P berührende schneiden. Ferner kann P_1 kein Inflexionspunkt sein, weil dieser Punkt auf einem Pseudozweig zweiter Ordnung liegt; es kann desshalb in P keine hyperoskulierende Ebene berühren.

Die Kurve R^n der zweiten Gattung lässt sich ganz ebenso behandeln, denn die Bestimmung der Projektion C^{n-1} derselben aus einem Punkt P der Kurve wurde in § 3 ganz unabhängig von einer Voraussetzung über den Index geführt. Desshalb liegt die Spur P_1 der Tangente in P auf einem Oval eines Pseudozweiges dritter Ordnung und aus P_1 kann keine Tungente an C^{n-1} gehen, weil eine solche mehr denn $n-1$ Punkte mit C^{n-1} gemein haben würde. Dass R^n auch hier keinen stationären Punkt haben kann, sieht man ganz wie im ersten Fall.

Die Sätze (18), (19) sind nun vollständig bewiesen.

Alles, was wir bis jetzt in dieser Arbeit gesagt haben, ist von dem algebraischen Charakter der Kurven unabhängig. Jetzt wollen wir uns bis weiter an den algebraischen Gebilden halten, und in diesem Fall die Existenz der oben genannten Kurven vom Maximalindex darthun. Wir werden dabei eine Kurve R^n als Schnittkurve einer Regelfläche zweiter Ordnung und einer Kegelfläche auffassen. Das Centrum der letzteren liegt auf der Regelfläche und deren Spur ist eine der im vorigen betrachteten Kurven C^{n-1}. Diese sind Kurven $(n-1)$-ter Ordnung und haben in einem Punkt F einen mehrfachen Punkt der $(n-2)$-ten oder der $(n-3)$-ten Ordnung jenachdem wir eine Kurve R^n der ersten oder der zweiten Gattung in Betracht ziehen. Die besondere Eigenschaft, die man noch von den Kurven C^{n-1} zu verlangen hat, ist die, dass sie keine Doppeltangenten haben müssen. Aber aus den Entwickelungen in § 3 folgt, dass die Zerlegung einer C^{n-1} in Pseudozweige dritter oder zweiter Ordnung sich durchführen lässt, wenn nur die Existenz eines solchen Punktes G feststeht, dass aus G keine ausserhalb G berührende Tangenten gehen.

Betrachten wir nun erst die Kurven erster Gattung. Hier hat man für $n=3$ schon eine gesuchte Kurve C^{n-1} in einem Kegelschnitt. Denken wir nun, wir haben schon eine Kurve $(n-1)$-ter Ordnung mit den gewünschten Eigenschaften. Dieselbe hat einen $(n-2)$-fachen Punkt F, und es existiert ein Punkt G ausserhalb der Kurve, aus dem keine Tangenten an C^{n-1} gehen. Aus dieser Kurve können wir durch eine Transformation eine Kurve n-ter Ordnung mit denselben Eigenschaften ableiten: Man braucht nämlich nur eine involutorische kvadratische Transformation erster Art[1]) zu applizieren, deren Hauptpunkte F, G und ein beliebiger ausserhalb C^{n-1} gewählter Punkt sind.

Die Projektion einer Kurve R^n zweiter Gattung aus einem Punkt der Kurve hat man für $n=3$ in einer beliebigen ebenen Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, indem man F in dem unpaaren Pseudozweig und G in dem Oval der Kurve wählt. Hat man nun eine Kurve C^{n-1} mit den genannten Eigenschaften, dann existiert auf der Kurve ein Punkt G, aus dem keine ausserhalb G berührende Tangenten gehen. Transformiert man diese Kurve durch eine involutoriske kvadratische Transformation ganz wie im ersten Fall, dann erhält man eine Kurve n-ter Ordnung mit den gewünschten Eigenschaften.

Ist nun P ein beliebiger Punkt im Raume, und legt man eine Regelfläche zweiter Ordnung durch PF und PG, wird diese von der Kegelfläche $(P \cdot C^{n-1})$ in einer Kurve n-ter Ordnung vom Maximalindex.

Offenbar erhält man so jede solche Kurve auf einer Regelfläche zweiter Ordnung.

Wenn man eine auf einer Regelfläche ϕ liegende algebraische Kurve vom Maximalindex hat, dann kann man offenbar aus ihr eine nicht analytische vom Maximalindex ableiten. Man braucht nur einen Elementarbogen α der algebraischen Kurve durch einen ganz beliebigen auf ϕ liegenden und dem Restbogen β sich anschmiegenden Bogen α' zu ersetzen, wobei man nur zu beobachten hat, dass keine Tangente an α' eine Tangente an α oder an β schneidet. Weil eine Tangente an α und eine an β einander nicht schneiden, ist diese Bedingung leicht zu befriedigen.

Es existieren also sicher auch nicht analytische Kurven R^n n-ter Ordnung vom Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung.

Besonderes Interesse knüpft sich an die analytischen Kurven R^n, die nicht algebraisch sind. Hier sind doch die Schwierigkeiten der Herstellung grösser, und nur für $n=3$ und $n=4$ kommt man leicht durch. Für $n=3$ hat man ein Oval zu finden, das von jedem durch einen Punkt F des Ovales und einen Punkt G ausserhalb desselben gehenden Kegelschnittes ausser in F naeh höchstens in drei Punkten geschnitten wird. Ein solches Oval erhält man aber mittelst eines elliptisch gekrümmtes Oval. Ein solches hat mit jedem Kegelschnitt, der durch einen unendlich fernen Punkt geht, höchstens vier Punkte gemein. Durch eine lineare und duale Transformation derselben erhält man also eine Kurve zweiter Ordnung, die mit jedem durch einen inneren Punkt der Kurve gehenden Kegelschnitt höchstens vier Tangenten und also auch höchstens vier Punkte gemein hat. Aus diesem Oval erhält man die Kurve C^3, welche zur Herstellung der Raumkurven R^4 zu benutzen sind, mittelst den oben genannten kvadratischen Transformationen, aber ohne neue Ansätze kann man nicht weiter kommen.

[1]) d. h. eine kvadratische Transformation, wo jedem Hauptpunkt die gegenüberliegende Seite des Hauptdreiecks entspricht.

(Forts. fra Omslagets S. 2.)

		Kr.	Øre
	VI, med 4 Tavler. 1890—92	13.	75.
1.	**Lorenz, L.** Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle. 1890	2.	»
2.	**Sørensen, William.** Om Forbeninger i Svømmeblæren, Pleura og Aortas Væg og Sammensmeltningen deraf med Hvirvelsøjlen særlig hos Siluroiderne, samt de saakaldte Weberske Knoglers Morfologi. Med 3 Tavler. Résumé en français. 1890	3.	80.
3.	**Warming, Eug.** Lagoa Santa. Et Bidrag til den biologiske Plantegeografi. Med en Fortegnelse over Lagoa Santas Hvirveldyr. Med 43 Illustrationer i Texten og 1 Tavle. Résumé en francais. 1892	10.	85.
	VII, med 4 Tavler. 1890—94	13.	75.
1.	**Gram, J. P.** Studier over nogle numeriske Funktioner. Résumé en français. 1890	1.	10.
2.	**Prytz, K.** Methoder til korte Tiders, særlig Rotationstiders, Udmaaling. En experimental Undersøgelse. Med 16 Figurer i Texten. 1890	1.	50.
3.	**Petersen, Emil.** Om nogle Grundstoffers allotrope Tilstandsformer. 1891	1.	60.
4.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 4[de] Afhandling. Med c. 185 mest af Forfatteren tegnede Figurer i 34 Grupper. Résumé et explication des figures en français. 1891	1.	50.
5.	**Christensen, Odin T.** Rhodanchromammoniakforbindelser. (Bidrag til Chromammoniakforbindelsernes Kemi. III.) 1891	1.	25.
6.	**Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Scopelini Musei Zoologici Universitatis Hauniensis. Bidrag til Kundskab om det aabne Havs Laxesild eller Scopeliner. Med 3 Tavler. Résumé en français. 1892	3.	50.
7.	**Petersen, Emil.** Om den elektrolytiske Dissociationsvarme af nogle Syrer. 1892	1.	25.
8.	**Petersen, O. G.** Bidrag til Scitamineernes Anatomi. Résumé en français. 1893	2.	75.
9.	**Lütken, Chr.** Andet Tillæg til «Bidrag til Kundskab om Arterne af Slægten *Cyamus* Latr. eller Hvallusene». Med 1 Tavle. Résumé en français. 1893	»	85.
10.	**Petersen, Emil.** Reaktionshastigheden ved Methylætherdannelsen. 1894	1.	50.
	VIII, med 3 Tavler. 1895—98	12.	25.
1.	**Meinert, F.** Sideorganerne hos Scarabæ-Larverne. Les organes latéraux des larves des Scarabés. Med 3 Tavler. Résumé et explication des planches en français. 1895	3.	30.
2.	**Petersen, Emil.** Damptryksformindskelsen af Methylalkohol. 1896	1.	»
3.	**Buchwaldt, F.** En mathematisk Undersøgelse af, hvorvidt Vædsker og deres Dampe kunne have en fælles Tilstandsligning, baseret paa en kortfattet Fremstilling af Varmetheoriens Hovedsætninger. Résumé en français. 1896	2.	25.
4.	**Warming, Eug.** Halofyt-Studier. 1897	3.	»
5.	**Johannsen, W.** Studier over Planternes periodiske Livsyttringer. I. Om antagonistiske Virksomheder i Stofskiftet, særlig under Modning og Hvile. 1897	3.	75.
6.	**Nielsen, N.** Undersøgelser over reciproke Potenssummer og deres Anvendelse paa Rækker og Integraler. 1898.	1	60.
	IX, med 17 Tavler. 1898—1901	17.	»
1.	**Steenstrup, Japetus,** og **Lütken, Chr.** Spolia Atlantica. Bidrag til Kundskab om Klump- eller Maanefiskene *(Molidæ)*. Med 4 Tavler og en Del Xylografier og Fotogravurer. 1898	4.	75.
2.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 5[te] Afhandling. Med 42 Figurgrupper. Résumé en français. 1899	1.	60.
3.	**Meyer, Kirstine.** Om overensstemmende Tilstande hos Stofferne. En med Videnskabernes Selskabs Guldmedaille belønnet Prisafhandling. Med en Tavle. 1899	2.	60.
4.	**Jørgensen, S. M.** Om Zeise's Platosemiæthylen- og Cossa's Platosemiamminsalte. Med 1 Tavle. 1900	»	75.
5.	**Christensen, A.** Om Overbromider af Chinaalkaloider. 1900	1.	»
6.	**Steenstrup, Japetus.** Heteroteuthis *Gray*, med Bemærkninger om Rossia-Sepiola-Familien i Almindelighed. Med en Tavle. 1900	»	90.
7.	**Gram, Bille.** Om Proteinkornene hos oliegivende Frø. Med 4 Tavler. Résumé en français. 1901	2.	50.
8.	**Meinert, Fr.** Vandkalvelarverne *(Larvæ Dytiscidarum)*. Med 6 Tavler. Résumé en français. 1901	5.	35.
	X, med 4 Tavler. 1899—1902	10.	50.
1.	**Juel, C.** Indledning i Læren om de grafiske Kurver. Résumé en français. 1899	2.	80.
2.	**Billmann, Einar.** Bidrag til de organiske Kvægsølvforbindelsers Kemi. 1901	1.	80.
3.	**Samsøe Lund** og **Rostrup, E.** Marktidselen *(Cirsium arvense)*. En Monografi. Med 4 Tavler. Résumé en français. 1901	6.	»
4.	**Christensen, A.** Om Bromderivater af Chinaalkaloiderne og om de gennem disse dannede brintfattigere Forbindelser. 1902	1.	40.
	XI, med 10 Tavler og 1 Kort. 1901—03	15.	05.
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceæ. 6[te] Afhandling. Med 47 Figurgrupper. Résumé en français. 1901.	2.	15.
2.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. I. Lamellibranchiater. Med 1 Kort og 4 Tavler. 1902.	4.	»
3.	**Winther, Chr.** Rotationsdispersionen hos de spontant aktive Stoffer. 1902	2.	»
4.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. II. Scaphopoder, Gastropoder og Cephalopoder. Med 5 Tavler. 1902	3.	40.
5.	**Winther, Chr.** Polarimetriske Undersøgelser II: Rotationsdispersionen i Opløsninger	1.	60.
6.	**Ravn, J. P. J.** Molluskerne i Danmarks Kridtaflejringer. III. Stratigrafiske Undersøgelser. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1903	3.	85.
	XII, med 3 Tavler og 1 Kort. 1902—04	10.	50.
1.	**Forch, Carl, Knudsen, Martin,** und **Sørensen, S. P. L.** Berichte über die Konstantenbestimmungen zur Aufstellung der hydrographischen Tabellen. Gesammelt von *Martin Knudsen*. 1902	4.	75.
2.	**Bergh, R.** Gasteropoda opisthobranchiata. With three plates and a map. (The Danish expedition to Siam 1899—1900, I.) 1902	3.	45.
3.	**Petersen, C. G. Joh., Jensen, Søren, Johansen, A. C.,** og **Levinsen, J. Chr. L.** De danske Farvandes Plankton i Aarene 1898—1901. 1903	3.	25.
4.	**Christensen, A.** Om Chinaalkaloidernes Dibromadditionsprodukter og om Forbindelser af Alkaloidernes Chlorhydrater med højere Metalchlorider. 1904.	1.	35.

Mathematatiske og astronomiske Skrifter

udgivne af det Kgl. danske Videnskabernes Selskab

(udenfor Skrifternes 6. Række, se Omslagets S. 2—3):

	Kr.	Øre
Braae, Joh. Meridianbeobachtungen von 304 B- und M-Sternen. 1914	»	65
Hansen, C. Recherches sur les singularités de certaines séries spéciales sur leur cercle de convergence. 1908	1.	20
Hansen, P. C. V. En Sætning om den Eulerske Faktor svarende til Differentialligningen $M + N\frac{dy}{dx} = 0$. 73	»	65
Hansteen, C. Den magnetiske Inclinations Forandring i den nordlige tempererte Zone. I, med et Kort. 55	2.	»
—— —— —— II. 57	1.	15
Hertzsprung, S. Reduktion af Maskelynes Iagttagelser af smaa Stjerner. 65	1.	15
Hjelmslev, J. Om Regning med lineære Transformationer. 1911	»	90
—— Grundlag for Fladernes Geometri. 1914	1.	65
Jensen, J. L. W. V. Undersøgelser over en Klasse fundamentale Uligheder i de analytiske Funktioners Theori. I. 1916	»	90
Juel, C. Om ikke-analytiske Kurver. 1906	1.	95
—— Om simple cykliske Kurver. 1911	»	65
—— Einleitung in die Teorie der ebenen Elementarkurven 3. und 4. Ordnung. 1914	1.	75
—— Die elementare Ringfläche vierter Ordnung. 1916	»	60
Nielsen, N. Recherches sur une classe de fonctions méromorphes 1904	1.	45
—— Recherches sur les fonctions sphériques. 1906	1.	75
—— Recherches sur quelques généralisations d'une identité intégrale d'Abel. 1907	1.	20
—— Recherches sur les nombres de Bernoulli. 1913	2.	40
—— Recherches sur les fonctions de Bernoulli. 1915	1.	65
Nørlund, N. E. Ueber lineare Differenzengleichungen. 1911	»	65
—— Untersuchungen über die Eigenbewegungen für 140 Sternen des IV. Secchischen Typus mittels älterer und eigener Beobachtungen. 1912	1.	40
Ramus, C. Undersøgelse af Resten i Lagranges Række, samt: Om en Egenskab ved de lineære Differential-Ligninger med 2 Variable. 42	»	65
—— Om nogle Curvers Rectification ved elliptiske Functioner. 45	»	50
—— Om Ellipsoiders Tiltrækning og om de ellipsoidiske Ligevægtsfigurer af flydende Masser. 45	1.	65
Schjellerup, H. C. F. C. Tycho Brahes Original-Observationer benyttede til Banebestemmelse af Cometen 1580. 54.	1.	»
Steen, A. Hovedsætninger om de overelliptiske Funktioner og: Om dobbelte bestemte Integraler. 49	»	65
—— Om Integrationen af Differentialligninger. Résumé en français. 68	»	35
—— Om Ændringen af Integraler af irrationale Differentialer. 69	»	40
—— Læren om homogene tunge Vædskers Tryk paa plane Arealer, m. 1 Tavle. Résumé en français. 72	»	75
—— Om Muligheden af et Par lineære Differentialligningers Integration ved endelige explicite Funktioner. 75	»	75
Strömgren, E. Ueber den Ursprung der Kometen. 1914	2.	»
Thiele, T. N. Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde, hvor en Komplikation af visse Slags uensartede tilfældige Fejlkilder giver Fejlene en «systematisk» Karakter. 80	»	85
Zeuthen, H. G. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, m. 5 Tavler. Résumé en français. 73	3.	60

---

d'Arrest H. L. Siderum nebulosorum observationes Havnienses. 67	12.	»
Hansen & Olufsen. Tables du soleil. 53	4.	»
—— —— Supplément aux tables du soleil. 57	»	35
Jürgensen, Chr. Sur le mouvement du pendule. 53	»	65
Schjellerup, H. C. F. C. Stjernefortegnelse, indeholdende 10,000 Positioner og teleskopiske Fixstjerner imellem — 15 og + 15 Graders Deklination. Med 1 Tavle. 64	7.	»